

Excentrisk paavirkede træ-søjler;

A. Ostenfeld

Tidsskrifter

BSM 1-1 Bygningsstatiske Meddelelser

1929

## EXCENTRISK PAAVIRKEDE TRÆ-SØJLER; FORSØG, DIMENSIONSBESTEMMELSE.

AF A. OSTENFELD.

For excentrisk paavirkede Søjler er den største resulterende Spænding, som bekendt:

$$\sigma_{\text{Res.}} = \frac{P}{F} + \frac{P(f_0 + f)}{W} = \sigma \left( 1 + \frac{f_0}{k} \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right), \quad (1)$$

hvor  $f_0$  er Begyndelses-Excentriciteten,  $f$  den elastiske Udbøjning paa Midten; og ligeledes er det bekendt, at man ved Anvendelse af denne Formel til Dimensionsbestemmelse ikke kan opnaa en Sikkerhed  $n$  mod Brud paa anden Maade end ved overalt paa højre Side at indføre  $nP$  for  $P$  og saa sætte  $\sigma_{\text{Res.}} \leq \sigma_C$ , hvor  $\sigma_C$  er Tryk-Brudgrænsen (Flydegrænsen).

Imidlertid er Sagen i Virkeligheden ikke klaret hermed. Allerede den Omstændighed, at Spørgsmaalet var sat op som Forhandlingsemne paa Brokongressen i Wien nu i Sept. 1928, giver en Antydning i denne Retning, og naar man undersøger, hvorledes der regnes Verden over, bestyrkes man i dette Indtryk. I de tyske »Hochbau-Vorschriften« af 1925 f. Ex. foreskrives Formlen:

$$\omega \cdot \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{\text{zul.}}$$

hvor  $\omega$  er det fra central Søjlepaavirkning hentede »Knickzahl«, som  $P$  skal multipliceres med, for at man derefter kan dimensionere, som om man havde med Træk at gøre. Herved er altsaa skaffet den nødvendige Sikkerhed overfor det centrale Tryk, hvorimod dette ikke synes at være Tilfældet overfor Momentet, om hvilket der kun siges, at det i særlig vigtige Tilfælde skal beregnes under Hensyn til Udbøjningen af Søjlen (men saavidt det kan ses, ikke netop under Hensyn til den Udbøjning,

der foraarsages af  $nP$ ). — De østrigske Normer<sup>1)</sup> er vistnok de eneste, der saa nogenlunde har knæsat det ovenfor opstillede Dimensioneringsprincip (at der skal regnes med  $nP$ ). Blot er der her lagt saa stor Vægt paa den Omstændighed, at Lign. (1) ikke gælder udover Proportionalitetsgrænsen, at denne Grænse ( $\sigma_P$ ) er fastsat som den kritiske Værdi af  $\sigma_{Res.}$ , saaledes at Forskriften lyder:  $\sigma_{Res.} \leq \sigma_P$  og til Gængæld kun  $n = 2$ .

Andre Steder regnes der med mere eller mindre empiriske Formler af Formen<sup>2)</sup>:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_B}{1 + \frac{f_0}{k} + \alpha \frac{l^2}{i^2}} = \frac{r_0}{1 + \frac{f_0}{k} + \alpha \frac{l^2}{i^2}}, \quad (2)$$

og i saa Fald opnaar man ganske vist (men maaske nok uden at tænke derover) den ønskede Sikkerhed mod Brud, hvis ellers Formlen er rigtig eller rigtig nok. Men det er den i Virkeligheden ikke, i alt Fald ikke for alle Excentricitets- og Slankhedsforhold.

Af Brudforsøg med excentrisk paavirkede Søjler foreligger der hidtil ikke mange. *Tetmajer* har nogle faa<sup>3)</sup>; han sammenligner med Lign. (1) og bringer Overensstemmelse til Veje ved at tilføje en Erfaringskoefficient som Faktor for hele højre Side, hvad ikke er videre rationelt. *Lilly*<sup>4)</sup> (Dublin) har udført en større Række Forsøg og udtrykker Resultaterne ved (2), betragtet som ren empirisk Formel, og ligeledes *Robertson*<sup>5)</sup> har en Del Forsøg, som han søger at bringe i Overensstemmelse med Lign. (1), uden at det dog lykkes helt for de kortere Søjler, hvad der efter den følgende Udvikling er naturligt nok. Endelig er der gjort en Del Forsøg i Zürich af *Roš* og *Brunner*<sup>6)</sup>, som for de kortere Søjlers Vedkommende opstiller en Beregningsmaade, der er ganske analog med den *Engesser-Kármán*'ske for centrale Søjler, og som fører til en Række Kurver for Bæreevnen, der foreslaas umiddelbart anvendte til Dimensionsbestemmelse.

Ganske i Almindelighed kan man søge at komme ud over Vanskeligheden ved, at Lign. (1) ikke gælder udenfor Proportionalitetsgrænsen, paa

1) Zeitschr. d. Oesterr. Ing. u. Arch. Ver. 1925, S. 380–81.

2) En saadan Formel skal ifølge *Salmon*: Columns, London 1921, S. 137, allerede være opstillet af *Tredgold* i 1822. Senere har *Emperger* (Zeitschr. d. Oesterr. Ing. u. Arch. Ver. 1897) foreslaaet Formel (2), og i Tekn. Tidsskr. 1898–99, S. 149 (eller Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 1462) er samme Formel udledet ved Opløsning (tilnærm.) af Ligning (1).

3) Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. Zürich 1901.

4) Proc. Inst. C. E. Vol. CLXXXI, London 1910, S. 460.

5) »The strength of struts«, Selected Eng. Papers (Inst. C. E.), London 1925.

6) Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl (Bericht der Gruppe VI der T. K. V. S. B.), Zürich 1926.

to Maader: man kan udenfor denne Grænse forsøge at regne med den virkelige Arbejdslinie og altsaa opgive Lign. (1), eller man kan gøre Lign. (1) anvendelig i Brudstadiet ved at tilføje en eller flere Erfaringskoefficienter. Den første af disse Veje er det, Roß og Brunner, og senere forøvrigt ogsaa *H. M. Westergaard* og *Wm. R. Osgood*<sup>1)</sup> er slaaet ind paa; den er selvfølgelig theoretisk uangribelig, men for den praktiske Anvendelse er det en Ulempe, at Resultatet kun kan udtrykkes grafisk. Ved den 2den af de nævnte Fremgangsmaader benytter man sig af Begrebet Brudmodulus til at gøre de to Led i Lign. (1) ensbenævnte, saaledes som allerede foreslaaet af *Bach* i Tilfælde af simpel Bøjning + Træk eller Tryk (uden Udknækningsfare); det er denne Methode, vi her skal gaa noget nærmere ind paa.

Ligning (1) skal i saa Fald skrives:

$$\sigma_{\text{Res.}} = \sigma \left( 1 + \beta \frac{f_0}{k} \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = \sigma \left( 1 + \beta \varphi_0 \sec \frac{l}{2i} \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \right), \quad (3)$$

hvor der for Kortheds Skyld er indført Betegnelsen:

$$\varphi_0 = \frac{f_0}{k}, \quad (3a)$$

og hvor

$$\beta = \frac{\text{Tryk} \times \text{Brudgr. (Flydegr.)}}{\text{Bøjn.} \times \text{Brudmodulus}} = \frac{\sigma_c}{s_b}. \quad (4)$$

$\beta$  er herefter, ligesom Brudmodulus  $s_b$ , afhængig af Tværnsitsformen og af Formen af Materialets Arbejdslinie.

Med Tilføjelsen af Koefficienten  $\beta$  er imidlertid endnu knap nok alt nødvendigt gjort for at sikre Lign. (1)'s Anvendelighed i Søjlers Brudstadium. Herved har man kun opnaaet, at de to Spændings-Bidrag i (1) med Rette kan adderes. Men Lign. (1) forudsætter endvidere, at Søjlers Udbøjning kan udtrykkes ved:

$$f = f_0 \left( \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} - 1 \right). \quad (5)$$

Paa Forhaand er det dog ret sandsynligt, at den Fejl, man begaar ved at anvende dette Udtryk helt op til Brud, ikke kan blive meget betydelig. For Staal er Arbejdsliniens Afgivelse fra den rette Linie ikke stor, naar man ikke gaar væsentligt ud over Flydegrænsen, og for Materialer, der ikke følger Hooke's Lov, er Arbejdslinien i Reglen i det hele saa svagt krummet, at der heller ikke her kan ventes nogen større Fejl. For de i

<sup>1)</sup> »Strength of steel columns«, Foredrag ved Møde i Maj 1928 i Pittsburg af *Am. Soc. Mech. Engr.'s*.



det følgende omtalte Forsøg med Træsøjler viser det sig i alt Fald, at Fejlen kan neutraliseres ved blot at regne med en lidt mindre Elasticitetskoefficient end den virkelige. For Staal-søjler synes Forholdet maaske dog noget mere tvivlsomt.

I Laboratoriet for Bygningsstatik er der nu i det sidste Aar udført en længere Række Forsøg med excentrisk paavirkede Søjler; Bearbejdelsen er dog foreløbig kun afsluttet for Forsøgene med Træsøjler.

Først skal der gøres opmærksom paa, at Formaålet med disse Forsøg ikke specielt var at studere Træsøjler, men herigennem at faa et Bidrag til Behandling af excentrisk paavirkede Søjler i Almindelighed. Dette søgtes opnaaet ved specielt for hver enkelt Søjle at bestemme de Materialkonstanter  $E$ ,  $\sigma_c$ ,  $s_b$ , som har Indflydelse paa Bæreevnen, og altsaa regne med nye Værdier af disse Størrelser for hver ny Søjle. Dette har medført en overordentlig Forøgelse af Arbejdet, men har til Gengæld betalt sig ved den opnaaede bedre Overensstemmelse.

Til Forsøgene anvendtes Søjler med kvadratisk Tværsnit (sydsvensk Fyr), ca.  $5 \times 5$  cm, med Excentriciteten i en Axe parallel med Siderne (Søjler I) eller i en Diagonal (Søjler II), samt med cirkulært Tværsnit (polsk Fyr), 5,5 à 5,9 cm Diam. Slankhedsforholdet ( $l : i$ ) varieredes fra 40 til 200 med Spring paa 20. Excentricitetsforholdene var: 0, 1, 2, 5, 10. Det vilde føre for vidt at gaa nærmere ind paa Enkeltheder vedrørende baade selve Søjleforsøgene og de tilhørende Tryk- og Bøjningsforsøg<sup>1)</sup>; vi maa her holde os til Resultaterne. Kun angaaende Bøjningsforsøgene og deres Betydning for Bestemmelsen af Koefficienten  $\beta$  er det nødvendigt paa Forhaand at gøre en Bemærkning.

For Træ er som bekendt Trækbrudgrænsen adskilligt større end Trykbrudgrænsen, ca. 2,5–3 Gange saa stor. Ved Bøjningsforsøget naas Trykbrudgrænsen derfor først, men dette medfører kun, at Fibrene paa Tryksiden i et eller flere Punkter folder sig, medens Modstandsevnen langtfra endnu er udtømt. Den neutrale Axe flytter sig hen mod Træksiden, og Bruddet indtræder tilsidst, fordi Trækbrudgrænsen naas. Den Brudmodulus  $s_b$ , der som sædvanligt findes af Ligningen:  $s_b = M_{\text{Brud}} : W$ , er derfor bestemt af Trækbrudgrænsen, og det kan følgelig ikke være den, man skal indføre i (4) til Bestemmelse af  $\beta$ . Søjlen maa antages at brydes, naar  $\sigma_{\text{Res}}$ , naar op til Trykbrudgrænsen  $\sigma_c$ , og det  $\beta$ , der skal indføres i (3), maa derfor bestemmes ved i (4) at erstatte  $s_b$  med en Værdi  $s'_b = M'_{\text{Brud}} : W$ , hvor  $M'_{\text{Brud}}$  er det Moment, der lige netop frembringer et Trykbrud i Bjælken. Dette Moment  $M'_{\text{Brud}}$  er imidlertid ikke helt let at bestemme, ikke en Gang, naar man kender Træk-Tryk-Arbejds-

<sup>1)</sup> En detailleret Beretning vil fremkomme i »Meddelelse 2« fra Laboratoriet.

linien (Fig. 1), idet man ikke nøjagtigt ved, naar Tryk-Bruddet indtræder, om det er ved Ordinaten 1 eller 2 eller maaske endnu længere henne. Af Arbejdslinien kan man dog udlede de Momenter  $M'$ , der svarer til Ordinaterne 1, 2  $\dots$  i Fig. 1, og deraf de tilsvarende Værdier  $s'_b = M' : W$  og deres Forhold ( $s'_b : s_b$ ) til den sædvanlige Brudmodulus  $s_b$ .

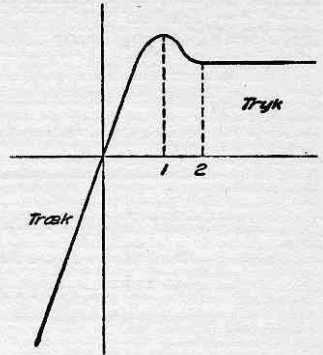


Fig. 1.

Man faar altsaa ikke nogen absolut Bestemmelse af  $\beta$  ved Bøjningsforsøgene alene. Men naar man ved Søjleforsøgene har bestemt det  $\beta$ , der tilvejebringer den bedst mulige Overensstemmelse med Lign. (3), kan man bagefter ved ovenstaaende Betragtninger lægge dette  $\beta$  fast i Forhold til den sædvanlige Brudmodulus og derved opnaa den Fordel, at  $\beta$  ikke er en blot empirisk Konstant, til hvis Bestemmelse der for hver ny Tværsnitsform er nye Søjleforsøg nødvendige.

Hvad nu selve Forsøgsresultaterne angaar, maa det være tilstrækkeligt at anføre, at Ligning (3) for de her undersøgte Træ-Søjler meget godt kan anvendes op til Brud, naar man 1) regner med en ca. 10% mindre Værdi af  $E$  end den virkelige, 2) indfører en Koefficient  $\beta$ , bestemt ved:

$$\beta = 1,43 \frac{\sigma_C}{s_b} = \frac{\sigma_C}{0,7 s_b}; \quad (4a)$$

Forholdet  $\sigma_C : s_b$  er afhængigt af Tværsnitsformen og kan regnes til:

for Søjlerne I:	$\sigma_C : s_b = 0,56,$	$(s_b : \sigma_C = 1,79),$	$\beta = 0,80,$
» » III:	» » = 0,49,	( » » = 2,04),	» = 0,70,
» » II:	» » = 0,43,	( » » = 2,33),	» = 0,61.

Erstatter man i (3) sec med det bekendte Tilnærmelsesudtryk:

$$\sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \sim 1 + \frac{5}{4} \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma},$$

hvor  $\sigma_E$  er Eulerværdien, og opløser dernæst (3) med Hensyn til  $\sigma$  faas:

$$\sigma = \sigma_B \cdot \psi \cdot \frac{1 + \alpha x^2}{\alpha x^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\psi} \frac{\alpha x^2}{(1 + \alpha x^2)^2}} \right], \quad (6)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} \sigma_B &= \frac{\sigma_C}{1 + \beta \varphi_0}, & \alpha &= \frac{\sigma_B}{\pi^2 E}, & \sigma &= \frac{P}{E}, \\ \psi &= \frac{1 + \beta \varphi_0}{2(1 - \frac{1}{4} \beta \varphi_0)}, & \varphi_0 &= \frac{f_0}{k}, & x &= \frac{l}{i}. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Efter (6) er nu  $\sigma$  beregnet for hvert enkelt Søjleforsøg, og ved Sammenligning af de beregnede og de observerede  $\sigma$  kommer man til en meget god Overensstemmelse, saaledes som det ses af følgende Middelfejl ( $=\sqrt{\sum \Delta^2/n}$ , hvor  $\Delta = \sigma_{\text{bereg.}} - \sigma_{\text{obs.}}$ ):

Excentrisk Paavirkning	Antal Forsøg	Middelfejl	
		i kg/cm <sup>2</sup>	i %
Søjler I . . . . .	74	9,0	9,2
» II . . . . .	60	10,0	12,3
» III . . . . .	43	15,1	10,0

Mere i Forbigaaende bemærkes angaaende de 27 Forsøg, der er anstillede med central Paavirkning, at de stemmer meget godt med Formlerne (3) eller (6) for excentrisk Paavirkning, naar man sætter  $\varphi_0 = 0,10$ . At dette er den bedste Værdi, fremgaar af Tallene:

for  $\varphi_0 = \dots\dots\dots 0,06, 0,09, 0,10, 0,11, 0,14$   
er Middelfejlen (i kg/cm<sup>2</sup>) for de 27 Forsøg: 19,0, 14,1, 13,6, 13,7, 16,7.

Omtrent lige saa god Overensstemmelse finder man ved Anvendelse af Parabel-Euler-Kurven, nemlig:

Central Paavirkning	Middelfejl	
	i kg/cm <sup>2</sup>	i %
Efter (6) . . . . .	13,6	7,7
» Parabel-Euler . . . . .	17,4	8,1

Den ellers ofte for Træsøjler anvendte Retlinie-Formel er slet ikke taget i Betragtning. Denne Formel har, som bekendt, navnlig faaet Vind i Sejlene ved Tetmajers Benyttelse af den, og man har derfor gjort sig den Ulejlighed at gennemregne Tetmajer's egne Forsøg efter Parabelformlen; der er dog herved kun taget Hensyn til dem af hans Forsøg, hvor Understøtningen var iværksat ved Staalspidser, idet Spørgsmaalet om den rigtige frie Længde for hans Forsøg med plane Understøtningsflader er altfor usikkert. Tetmajer opgiver kun Trykbrudgrænsen for de enkelte Grupper af Forsøg, ikke for hver enkelt Søjle, og der er derfor regnet paa to Maader: enten med forskelligt  $\sigma_C$  for disse enkelte Grupper, (a), eller (som Tetmajer selv gjorde det) med et General-Middeltal af  $\sigma_C$  for alle Forsøgene, (b), og man er herved kommen til følgende Tal:

	Antal Forsøg	Middelfejl i kg/cm <sup>2</sup> efter			
		Parabel a	Parabel b	Tetmajers Ret-Linie	excentrisk Formel (6)
Alene indenfor Parabel-Omraadet	83	31,2	32,9	33,1	29,0
Alle Forsøg (Euler-Omraadet inkl.)	132	25,2	26,6	26,9	

Man ser her, at Parablen ligesom ved Jærnsøjler giver et mindst lige saa nøjagtigt Udtryk for Resultaterne som Ret-Linie-Formlen, og der er derfor neppe nogen Grund til at fastholde sidstnævnte Formel længere. Endvidere lægger man Mærke til, ved Sammenligning af den absolute Størrelse af Middelfejlen her og ovenfor, at Arbejdet med at fastslaa Materialelegenskaberne for hver enkelt Søjle og lægge disse til Grund for Bearbejdelsen ikke har været forgæves.

#### *Dimensionsbestemmelse af excentrisk paavirkede Søjler.*

Naar  $P$ ,  $f_0$ ,  $l$  og Sikkerhedsgraden  $n$  er givne, kan man ud fra de ovenfor omtalte Formler bestemme Dimensioner paa to Maader:

1. Man kan gaa direkte ud fra Lign. (3) eller med Benyttelse af Tilnærmelsesudtrykket for sec fra:

$$\sigma_{\text{Res.}} = \sigma \left( 1 + \beta \varphi_0 \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma} \right) \right). \quad (3a)$$

Man skønner et Tværsnit, beregner hermed højre Side, idet der her sættes  $n\sigma$  for  $\sigma$ , og har saa Betingelsen:  $\sigma_{\text{Res.}} \leq \sigma_C$ . Er den ikke opfyldt, ændrer man paa de skønnede Dimensioner, indtil Overensstemmelsen er tilstrækkelig god.

2. Eller man gaar ud fra (6), der her skrives:

$$\sigma_{\text{till.}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_C}{1 + \beta \varphi_0} \cdot \psi \cdot \frac{1 + \alpha x^2}{\alpha x^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\psi} \frac{\alpha x^2}{(1 + \alpha x^2)^2}} \right],$$

beregner ligeledes her højre Side med et Sæt skønnede Dimensioner og prøver sig frem, indtil  $\frac{P}{F} \leq$  højre Side.

Enten man benytter den ene eller den anden Fremgangsmaade, er Beregningen besværlig; og at udvikle Kvadratroden i (6) i Række, hvorved:

$$\sigma = \frac{1}{n} \frac{\sigma_C}{1 + \beta \varphi_0} \left[ \frac{1}{1 + \alpha x^2} + \frac{1}{2\psi} \frac{\alpha x^2}{(1 + \alpha x^2)^3} + \dots \right]$$



hjælper ikke stort, da det normalt ikke er tilstrækkeligt kun at medtage 1ste Led. — En simplere Dimensioneringsmethode er derfor i høj Grad ønskelig, men den er paa den anden Side ikke mulig, med mindre det lykkes at give Udtrykket for  $\sigma_{\text{till}}$  en simplere Form. Det er et Forslag i denne Retning, der her skal gøres.

*Udvidelse af Parabel-Euler-Formlen til excentrisk Paavirkning.*

Der gaas herved ud fra, at centralt paavirkede Søjler kun er et specielt Tilfælde af excentrisk paavirkede, — det er bekendt, at man kan bruge Lign. (6) med en passende lille konstant Værdi af  $\varphi_0$  (ovenfor nævntes  $\varphi_0 = 0,1$ ) som Udtryk for centralt paavirkede Søjlers Bæreevne, — og at man paa den anden Side med tilstrækkelig Nøjagtighed kan benytte Parabel-Eulerkurven for centrale Søjler. Det synes herefter ikke urimeligt at forsøge, om man ikke ogsaa for excentrisk paavirkede Søjler kan benytte en Kombination af en Euler-lignende Kurve med en Parabel.

Den ved (6) givne Kurve (eller Række af Kurver; én for hvert  $\varphi_0$ ) har for de større ( $l:i$ ) stor Lighed med Eulerkurven; ved en vandret Parallelforskydning af Eulerkurven kan man bringe den til næsten at falde sammen med Kurverne (6). For ( $l:i$ ) = 0 giver (6):  $\sigma = \sigma_B = \frac{\sigma_C}{1 + \beta\varphi_0}$ , og for de mindre ( $l:i$ ) kan Kurven (6) uden større Fejl erstattes med en Parabel, hvis Ligning foreløbig kan skrives:

$$\sigma = \sigma_B - \gamma x^2, \quad (7)$$

medens den parallelforskudte Eulerkurve har Ligningen:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{(x + c)^2}, \quad (8)$$

hvor  $c$  er Størrelsen af Parallelforskydningen. I (7) og (8) staar det endnu tilbage at bestemme eller vælge  $c$  og  $\gamma$ .

Herved maa der først og fremmest sørges for, at de nye Kurver (7) og (8) nærmer sig saa meget som muligt til Kurven (6); men dernæst er det et væsentligt Hensyn, at der opnaas en saa simpel som mulig Dimensionsbestemmelse. Begge Ønsker faar man til en vis Grad opfyldte ved at forlange, at de tre Kurver skal have et Punkt med Ordinaten  $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_B$  fælles. I Fig. 2 er vist de excentriske Søjlekurver (6) for en Række Værdier af  $\varphi_0$ , og for hver af dem er punkteret den Parabel og parallelforskudte Eulerkurve, der er lagt fast ved den nævnte Betingelse; den øverste Kurve er den, der kan benyttes for central Paavirkning ( $\varphi_0 = 0,1$ ), og for hvilken man altsaa ved, at den ved Parabel + Eulerkurve opnaaede Overensstemmelse er tilstrækkelig. Og ved Sammenligning med den

faar man et tydeligt Begreb om, at Overensstemmelsen ogsaa maa være god nok for de andre Kurver.

For at faa et mere haandgribeligt Bevis for Brugbarheden af den foreslaaede Tilmærmelse (7)–(8) har man for alle de udførte Forsøg beregnet

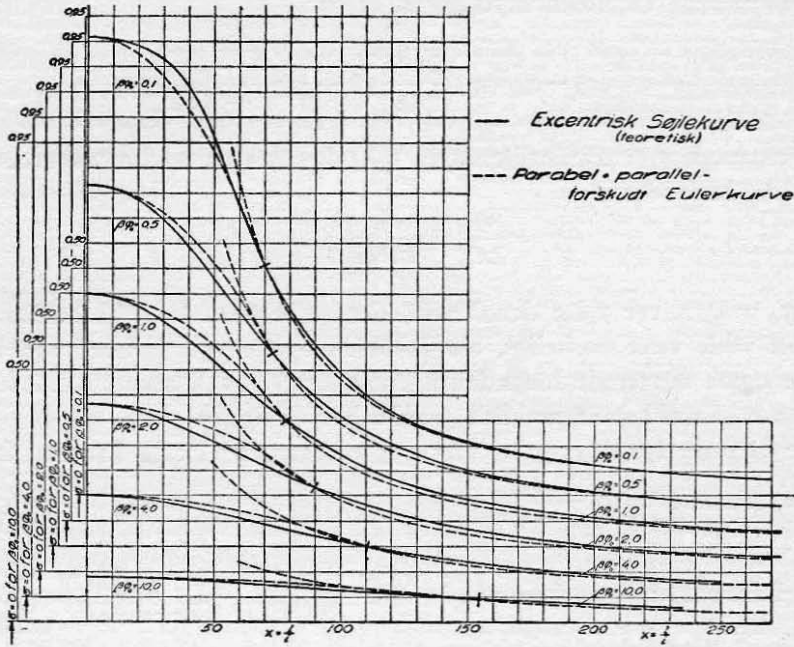


Fig. 2.

$\sigma (= \sigma_{PE})$  efter (7)–(8) og dannet Middelfejl, saaledes at denne kan sammenlignes med den ovenfor omtalte Middelfejl for Kurven (6); Resultatet er:

	Middelfejl i kg/cm <sup>2</sup>	
	paa $\sigma_0$	paa $\sigma_{PE}$
For Søjler I .....	9,0	8,0
» » II .....	10,0	10,7
» » III .....	15,1	16,9

Tilbage staar det at bestemme  $\gamma$  og  $c$  i (7) og (8) og dernæst at vise, hvorledes Dimensionsbestemmelsen former sig med disse Ligninger som Udgangspunkt.

Naar man i Lign. (6) sætter  $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_B$ , findes med Betegnelserne i (6a) Abscissen:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{\frac{1 + \beta\varphi_0}{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}}, \quad (9)$$

medens den almindelige Eulerkurve har Ordinaten  $\frac{1}{2}\sigma_B$  for Abscissen:

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_B}}.$$

Størrelsen  $c$  af Parallelforskydningen er da:

$$c = x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_B}} \left( 1 - \sqrt{\frac{1 + \beta\varphi_0}{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}} \right). \quad (10)$$

Konstanten  $\gamma$  i Parabelligningen (7) bestemmes ved at sætte  $x = x_1$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_B$ , hvorved:

$$\gamma = \frac{\sigma_B}{2x_1^2} = \frac{\sigma_B^2}{4\pi^2 E} \cdot \frac{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}{1 + \beta\varphi_0}. \quad (11)$$

For  $\varphi_0 = 0$  bliver  $\gamma$  lig den Værdi, der er bekendt fra Johnson-Parablen. — Det vilde være ønskeligt, om Parablen og den parallelforskudte Eulerkurve ogsaa tangerede hinanden i Punktet  $(x_1, \frac{1}{2}\sigma_B)$ , men i Fig. 2 ses forøvrigt, at Knækket er praktisk ganske betydningsløst.

De tilladelige Tyngdepunktsspændinger ( $P: F$ ) kan nu skrives, idet  $\sigma_B$  erstattes med  $\frac{\sigma_C}{1 + \beta\varphi_0}$ :

$$\text{efter Parablen: } \sigma_{\text{till.}} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_C}{1 + \beta\varphi_0} \left( 1 - \frac{\sigma_C}{4\pi^2 E} \cdot \frac{l^2}{i^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}{(1 + \beta\varphi_0)^2} \right),$$

eller med Betegnelserne:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{n} \sigma_C = \text{tilladelig Trykspænding,} \\ x &= \frac{\sigma_C}{4\pi^2 E} = \text{en Talværdi, der beregnes én Gang for alle,} \\ \Phi &= \frac{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}{(1 + \beta\varphi_0)^2}, \quad \zeta = \frac{F}{i^2} = \frac{F^2}{I}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\sigma_{\text{till.}} = \frac{r_0}{1 + \beta\varphi_0} \left( 1 - \zeta x \frac{l^2}{F} \cdot \Phi \right); \quad (13)$$

og efter den parallelforskudte Eulerkurve:

$$\sigma_{\text{till.}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2 E i^2}{l^2 \left( 1 + \frac{c}{x} \right)^2}, \quad \text{eller} \quad P_{\text{till.}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2 E I}{l^2 \left( 1 + \frac{c}{x} \right)^2}. \quad (14)$$

For kortere Søjler faas da efter (13) det nødvendige Tværnsnitsareal  $F$  af:

$$\frac{P}{F} = \sigma_{\text{till.}} = \frac{r_0}{1 + \beta\varphi_0} \left( 1 - \zeta x \frac{l^2}{F} \cdot \Phi \right),$$

eller med: 
$$F_0 = \frac{P}{r_0} \quad \text{og} \quad F'_0 = F_0 (1 + \beta \varphi_0):$$

$$F_0 (1 + \beta \varphi_0) = F'_0 = F - \zeta \lambda^2 \cdot \Phi,$$

$$\underline{F = F'_0 + \zeta \lambda^2 \cdot \Phi.} \quad (15)$$

For  $\varphi_0 = 0$  (central Paavirkning) er  $F'_0 = F_0$  og  $\Phi = 1$ , hvorved (15) gaar over til den bekendte Formel. —  $F'_0$  betyder det nødvendige Tvær-  
snit, naar der ikke tages Hensyn til Udbøjningen; hvis Tværnittet kun  
er paavirket af et centralt Tryk  $P$  og et Moment  $Pf_0$ , bestemmes Dimen-  
sionerne nemlig af:

$$r_0 = \frac{P}{F} + \beta \frac{Pf_0}{W} = \frac{P}{F} \left( 1 + \beta \frac{f_0}{k} \right),$$

hvoraf

$$F = F_0 (1 + \beta \varphi_0) = F'_0.$$

Stivhedstillæget  $\zeta \lambda^2 \cdot \Phi$  er for  $f_0 = 0$ ,  $\Phi = 1$  lig  $\zeta \lambda^2$  ligesom for  
centrale Søjler, og for voxende Excentricitet aftager det til Nul (for  $f_0 = \infty$ ).

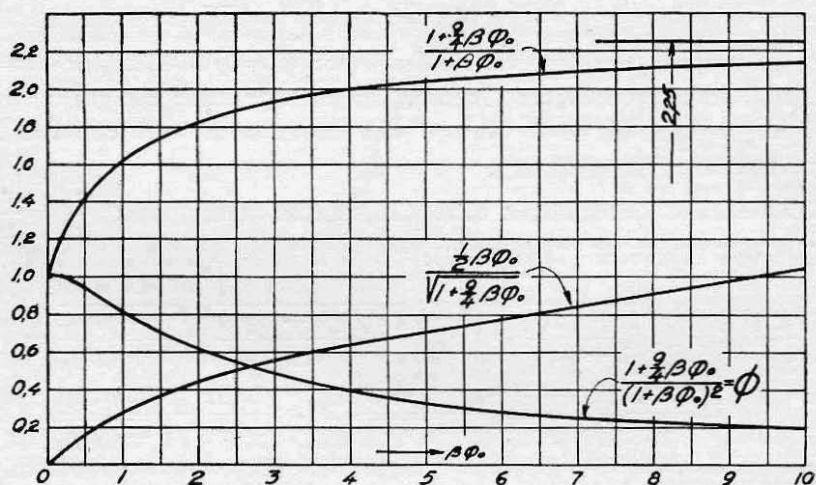


Fig. 3.

Naar man er fortrolig med Dimensionsbestemmelsen ved Parabelform-  
len for centralt paavirkede Søjler, er der ikke stort at føje til angaaende  
Anvendelsen af (15). Konstanterne  $\zeta$ ,  $\lambda$  og  $\Phi$  er alle rene Tal.  $\zeta$  er som  
bekendt kun afhængig af Tværsnitsformen,  $\lambda$  kun af Materialet; Tallet  
 $\Phi$  ligger, som sagt, mellem 1 og 0 ( $\Phi = 0,4$  for  $\beta \varphi_0 = 4$ ); det maa fo-  
reløbig skønnes og til Slut verificeres. Variationen af  $\Phi$  og et Par lignende  
Størrelser, der forekommer i Formlerne (16) nedenfor, ses i Fig. 3.

Formel (15) er kun gyldig, saa længe



$$\frac{P}{F} = \sigma_{\text{till.}} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_B}{2} = \frac{\frac{1}{2}r_0}{1 + \beta\varphi_0}, \quad \text{eller} \quad \frac{P(1 + \beta\varphi_0)}{r_0} = F'_0 > \frac{1}{2}F;$$

$$\text{Gyldighedgrænsen er altsaa:} \quad F = 2F'_0. \quad (15a)$$

I Fig. 2 ses forøvrigt, at Abscissen  $x_1$  til Sammenstødspunktet for Parabel- og Eulerkurven altid er større for excentrisk end for centralt paavirkede Søjler, saa det vil i Praxis være yderst sjældent, man faar Brug for Eulerkurven og den heraf nedenfor udledede Dimensioneringsformel.

For slankere Søjler skal man gaa ud fra (14) og faar da:

$$I_{\text{nødv.}} = n \cdot \frac{Pl^2}{\pi^2 E} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^2. \quad (16)$$

Idet denne Formel kun skal anvendes, naar  $x > x_1$ , faar man en højere Grænseværdi for  $I_{\text{nødv.}}$  ved at erstatte  $x$  med  $x_1$ , altsaa, idet  $c$  og  $x_1$  udtrykkes ved Hjælp af (9) og (10):

$$I_{\text{nødv.}} < n \frac{Pl^2}{\pi^2 E} \left(1 + \frac{c}{x_1}\right)^2 = n \frac{Pl^2}{\pi^2 E} \cdot \frac{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}{1 + \beta\varphi_0}. \quad (16a)$$

Sidste Faktor her kan kun variere fra 1 (for  $\varphi_0=0$ ) til 2,25 (for  $\varphi_0=\infty$ ); idet (16a) leverer en højere Grænse, kan man praktisk talt gaa ud fra, at  $I_{\text{nødv.}}$  højst kan blive 2 Gange saa stort som ved central Paavirkning.

Ved virkelige Beregninger efter (16) sætter man bedst  $\frac{c}{x} = \frac{c}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x}$  og faar ved Hjælp af (9) og (10):

$$\begin{aligned} \frac{c}{x_1} \cdot x_1 &= \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}{1 + \beta\varphi_0}} - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{2\pi^2 E (1 + \beta\varphi_0)}{\sigma_c}} \sqrt{\frac{1 + \beta\varphi_0}{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}} = \\ &= \frac{2\pi^2 E}{\sigma_c} \left( \sqrt{1 + \beta\varphi_0} - \frac{1 + \beta\varphi_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}} \right) \approx \frac{2\pi^2 E}{\sigma_c} \cdot \frac{\frac{1}{2}\beta\varphi_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}}, \end{aligned}$$

og derved endelig

$$I_{\text{nødv.}} = \frac{nPl^2}{\pi^2 E} \left(1 + \frac{x_0}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\beta\varphi_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}\beta\varphi_0}}\right)^2, \quad \text{idet } x_0 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_c}}. \quad (16b)$$

De udviklede Dimensioneringsformler (15) og (16) kræver ganske vist ogsaa, ligesom de oprindelige Formler (3) eller (6), en gentagen Prøven sig frem; men de er betydelig mere overskuelige, idet de søgte Dimensioner ved dem er sat i Forhold enten til dem, der kræves uden Hensyn til Udknækningsfaren, eller til de ved central Paavirkning nødvendige. Og det gentages her, at man næsten aldrig vil behøve at benytte Lign. (16).